

GESTIÓN FORESTAL CON RESTRICCIÓN DE ADYACENCIA BASADA EN PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA: EFECTO DE LA RELAJACIÓN

FOREST MANAGEMENT WITH ADJACENCY RESTRICTIONS BASED ON MATHEMATICAL PROGRAMMING: EFFECT OF INTEGER RELAXATION

Diego Broz¹
Guillermo Durand²
Mariano Frutos³

Fecha de recepción: 13/06/2013

Fecha de aceptación: 16/12/2013

1. Ing. Ftal. Becario CONICET. IIESS CONICET – Universidad Nacional del Sur Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina. diego.broz@uns.edu.ar
2. PhD. Ing. Quim. Docente. Departamento de Ingeniería Química – Universidad Nacional del Sur. Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina. gdurand@plapiqui.edu.ar
3. PhD. Ing. Ind. Investigador Asistente CONICET. Departamento de Ingeniería – Universidad Nacional del Sur Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina. mfrutos@uns.edu.ar

SUMMARY

In this paper was studied three mathematical models for forest management whose objective is to decrease the human impact of the activity on the environment and maximizes economic benefits. Optimization models URM (*Unit Restriction Model*) and two variants, URM-E (*Unit Restriction Model-E*) and URM-T (*Unit Restriction Model-T*), limit the harvest of adjacent stands to avoid opening large forest areas, resulting in NP-hard or NP-hard problems. Scenarios were simulated from 30×3 (stand \times period) to 1000×10 with *Pinus taeda L.* under different growth conditions. Models were solved with GAMS/CPLEX. Minor scenarios to 50×6 converge to an optimum value in a reasonable time, but larger required integer relaxation. With an integer gap greater than 1% a solution is obtained less than 3 seconds without significant changes in the target value. In most cases, the URM model results in better objective function value, followed by URM-T and URM-E.

Key Words: adjacencies restriction, integer optimization, gap, simulation.

RESUMEN

Se estudian tres herramientas de gestión forestal, los modelos de optimización URM (*Unit Restriction Model*) y dos variantes, URM-E (*Unit Restriction Model-E*) y URM-T (*Unit Restriction Model-T*), limitan la cosecha de rodales adyacentes evitando apertura de extensas áreas boscosas, estos están definidos como NP-hard o NP-difíciles. Se simularon escenarios desde 30×3 (rodal \times período) hasta 1000×10 con *Pinus taeda L.* bajo distintas condiciones de crecimiento. Se resolvieron los modelos con GAMS/CPLEX. Los escenarios menores a 50×6 convergen a un valor óptimo en un tiempo razonable, por encima de este escenario se requiere relajación del modelo. Con un *gap* de [0,01] se obtienen tiempos de resolución menores a 3 segundos sin cambios significativos en el valor objetivo. En la mayoría de los casos el modelo URM presenta mejores valores de la función objetivo seguido por URM-T y URM-E.

Palabras Claves: restricción de adyacencias, optimización entera, GAP, simulación.

INTRODUCCIÓN

El impacto de las actividades antrópicas sobre el ambiente es un problema bien conocido, por ello distintos organismos provinciales, nacionales e internacionales buscan desarrollar métodos alternativos para seguir produciendo bienes y servicios con un menor impacto sobre el mismo.

La actividad forestal se encuentra en un punto clave ya que afecta directamente al ambiente (talas, eliminación de cobertura, quemadas) y dependiendo de la región es muy cuestionada, sin embargo ésta genera a la vez importantes beneficios económicos (desarrollo de la comunidad), sociales (fuente de trabajo) y ambientales (fijación de CO₂), esto conlleva a la necesidad de minimizar los impactos negativos de la misma.

La tala de bosques provoca los impactos negativos más importantes ya que genera áreas sin cobertura arbórea dejando al descubierto el suelo provocando erosión y un impacto visual negativo en el paisaje, además de la disminución de materia orgánica y las fuentes de alimento para animales y elimina corredores faunísticos.

Autores como BOUGIORNO y GILLES (2003) y BETTINGER *et al.*, (2009) recomiendan el uso de modelos matemáticos como programación lineal, no lineal, entera y mixta-entera como herramienta de apoyo en la gestión del recurso forestal. Este último autor menciona que los objetivos de la gestión y planificación de los recursos naturales abarcan metas económicas, ambientales y sociales.

Es posible disminuir estos impactos aplicando un modelo de planificación de cosecha con restricción de adyacencia. De esta manera se podría limitar el tamaño de las áreas de cosecha evitando talar rodales adyacentes y así disminuir el impacto de la actividad. De los modelos más importantes encontramos el ARM (*area restriction model*) y el URM (*unit restriction model*) los cuales son abordados por MURRAY y CHURCH (1995), MURRAY (1999, 2007) y GOYCOOLEA *et al.*, (2005, 2009). La base de estos es la programación lineal entera mixta PLEM (o MILP por sus siglas en inglés).

El modelo ARM se base en la restricción de cosecha de un rodal o un conjunto de rodales en los cuales la suma de las superficies supere un área máxima de corta (A_{max}) predeterminada. Este modelo requiere que la superficie de cada rodal sea menor o igual al $A_{max}/2$ y que los mismos sean cosechados una sola vez en el horizonte de planificación. URM difiere en que el tamaño de cada rodal debe ser menor o igual a A_{max} (BELTRÁN PÉREZ *et al.*, 2011). Se puede ver que la diferencia entre los modelos radica en que el ARM selecciona rodales contiguos si la sumatoria de las superficies es menor a A_{max} sin embargo el URM no selecciona ningún rodal adyacente.

Los modelos URM y ARM no compiten por ofrecer mejores soluciones. Están diseñados para ofrecer soluciones en condiciones diferentes para un bosque y no existe investigación que demuestre la superioridad de un modelo en relación a otro. Sin embargo al momento del planteo del modelo, el ARM es más difícil del resolver (MURRAY y WEINTRAUB, 2002) dado que tiene una primera etapa donde se generan conjuntos factibles con una superficie menor a una máxima establecida (A_{max}) obteniéndose de esta manera los cliques o conjuntos factibles, esto implica el uso de una regla heurística utilizando C, C++, u otro lenguaje de programación; y una segunda etapa donde se aplica un modelo de programación entero para hallar la combinación óptima de rodales.

Plantear el modelo URM no requiere este procesamiento previo de los datos, lo que lo hace más interesante desde el punto de vista práctico ya que se debe resolver el PLEM directamente. Varios autores se refieren a los modelos de adyacencia como NP-difíciles (ó NP-hard) (FLOUDAS, 1995), (GOYCOOLEA *et al.*, 2005), ya que la razón del crecimiento del tiempo de cómputo respecto al aumento del tamaño es de tipo exponencial dado que

si se tiene n variables existen 2^n soluciones posibles (HILLIER y LIEBERMAN, 1997) por ende esto requiere de algoritmos eficientes para hallar los valores óptimos.

La resolución se realiza mediante la aplicación del algoritmo “ramificación y poda” o “Branch and Bound” (BB), este es una clase de método para resolver PLEM y programación entera no lineal (MINLP) (EDGAR *et al.*, 2001), el mismo autor menciona que este método es el más popular y que podemos encontrar en la mayoría de los software comerciales. Dentro de los software comerciales tenemos a GAMS (*General Algebraic Modeling System*) como una de las mejores herramientas (FLOUDAS, 1995). GAMS es un lenguaje de modelado de alto nivel para optimización matemática diseñado para modelar y resolver problemas lineales, no lineales, enteros, mixtos, dinámicos y estocásticos. Para esto opera con distintos *solvers* de acuerdo al tipo de problema y además es el lenguaje más ampliamente difundido (RAMOS *et al.*, 2010). Dentro de los *solvers* de GAMS se encuentra CPLEX, uno de los mejores optimizadores existentes en la actualidad para problemas LP y PLEM (RAMOS *et al.*, 2010).

El objetivo del trabajo es analizar el desempeño de tres modelos, un modelo general URM, un modelo que incluye una restricción económica URM-E y uno modelo con restricción tecnológica URM-T a distintas escalas patrimoniales. Esto se debe a que hay trabajos que plantean el uso de estos modelos pero no mencionan la relajación del algoritmo, este es el caso (GOMIDE *et al.*, 2010), (BELTRÁN PÉREZ *et al.*, 2011) y (BELTRÁN PÉREZ, 2012). BELTRÁN PÉREZ *et al.*, (2011) menciona una relación lineal entre el número de rodales y tiempo de resolución para URM y URM-E en un escenario de hasta 1000 rodales, 9 períodos y 1947 pares adyacentes, con tiempo de cómputo menores a 0,6. El mencionado autor ha resuelto el modelo mediante el software de optimización IBM ILOG CPLEX 11.2.0, ejecutado desde un servidor Sun-Fire-V440 con cuatro procesadores Ultra SPARC IIIi a 1.593 Ghz.

MATERIALES Y MÉTODOS

Restricción de cosecha de rodales adyacentes

Este modelo se basa en la restricción de la cosecha de rodales adyacentes en igual período, como se detalla en la **figura 1**, al seleccionarse para la cosecha el rodal 2 (r_2), el modelo restringe la selección del rodal adyacente inmediato, en este caso r_1 , r_4 y r_5 , en consecuencia el rodal 3 puede ser seleccionado simultáneamente al r_2 .

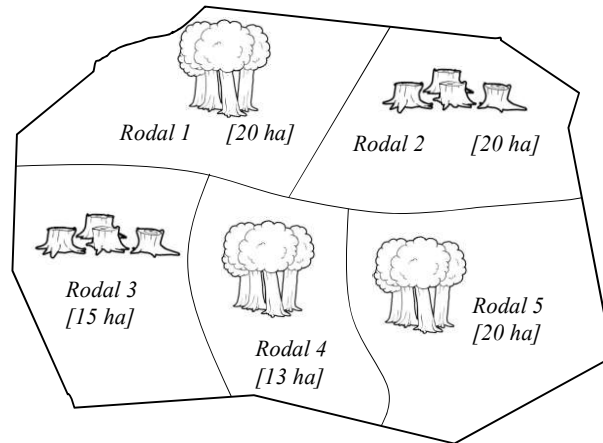


Figura 1. Esquematación de la regla de decisión para un predio de 5 rodales y un período.
Figure 1. Outlining of the decision rule for an area of 5 stands and a period.

El planteamiento matemático del PLEM está formado por los siguientes conjuntos, índices y parámetros:

I = Conjunto de unidades de manejo del predio; $i \in I$.

T = Conjunto de períodos de tiempo en el horizonte de planificación; $t \in T$.

N_i = Conjunto de unidades de cosecha j adyacente a la unidad i ; $i \in I, j \in N_i$.

v_{it} = Volumen¹ de madera al cosechar el rodal i en el período t ; $i \in I, t \in T$.

β_{it} = Beneficio de cosechar el rodal i en el período t ; $i \in I, t \in T$.

L_t = Límite inferior de volumen a ser cosechado en el período t ; $t \in T$.

U_t = Límite superior de volumen a ser cosechado en el período t ; $t \in T$.

M_i = Edad de maduración económica o tecnológica del rodal i ; $i \in I$.

a_{it} = Edad promedio de los árboles en el bloque i y en el período t ; $i \in I, t \in T$.

La variable de decisión binaria corresponde:

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & \text{Si la unidad } i \text{ es cosechada en el período } t \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función objetivo del modelo se define como:

$$\text{Max } Z = \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \beta_{it} \times x_{it} \quad [1]$$

Sujeto a:

$$x_{it} + x_{ij} \leq 1 \quad i \in I, t \in T, j \in N_i, \quad [2]$$

$$\sum_{t \in T} x_{it} \leq 1 \quad i \in I, \quad [3]$$

$$\sum_{i \in I} v_{it} \times x_{it} \geq L_t \quad t \in T, \quad [4]$$

$$\sum_{i \in I} v_{it} \times x_{it} \leq U_t \quad t \in T, \quad [5]$$

$$M_i \times x_{it} \leq a_{it} \quad i \in I, t \in T \quad [6]$$

$$x_{it} \in \{0,1\} \quad i \in I, t \in T, \quad [7]$$

¹ A los fines prácticos se trabaja con la relación masa volumen igual a 1, o sea $1 \text{ m}^3 = 1 \text{ tn}$.

El objetivo de [1] es maximizar el beneficio asociado al volumen de cosecha. La restricción [2] evita que se cosechen pares de unidades adyacentes en el mismo período. La [3] garantiza que cualquier unidad de manejo sea cosechada a lo más una vez en el horizonte de planificación. Las restricciones [4] y [5] mantienen los volúmenes de cosecha dentro de límites inferiores y superiores con el objeto de lograr abastecer a la industria y no excederse de la capacidad de la misma en cada período. La restricción [6] condiciona la cosecha solo a los rodales maduros y es aquí donde se diferencian los modelos URM, URM-E y URM-T ya que el primero no cuenta con esta restricción por ende la cosecha puede ser realizada en cualquier edad. En cambio los modelos URM-E y URM-T limitan una edad mínima para la cosecha. En el caso del modelo URM-E la limitación es económica y el caso del modelo URM-T es tecnológica, esto quiere decir que serán cosechados si cumplen con los diámetros mínimo requeridos por la industria. Finalmente la [7] refleja la integralidad de la variable de decisión.

Los modelos PLEM, a medida que van creciendo en tamaño, requieren mayor tiempo de procesamiento (horas, días, semanas) para llegar a una solución óptima, para evitar este problema se suele optar por trabajar con una solución sub-óptima, para ello los *solvers* requieren especificar una tolerancia. En el caso de GAMS/CPLEX tiene por defecto 0,1 (10%) (MCCARL *et al.*, 2008) y (GAMS DEVELOPMENT CORPORATION, 2012). GAMS/CPLEX brinda la posibilidad de relajar de forma absoluta con el comando OptCA y relativa con el comando OptCR. En este trabajo se analiza la relajación relativa ya que es más aplicable.

Relajación del modelo

La relajación es la diferencia (denominada GAP) entre la solución óptima (Z^O) y la mejor solución entera obtenida (Z^R), por lo tanto se cumplirá que $Z^O \geq Z^R$ (FLOUDAS, 1995), con esto podemos definir el criterio de optimalidad relativa como [8], que es definida generalmente en GAMS.

Sin embargo CPLEX difiere este criterio y define la tolerancia (denominada OptCR) como se muestra en la [9].

$$\frac{Z^O - Z^R}{Z^O} \leq \text{tolerancia} \quad [8]$$

$$\frac{Z^O - Z^R}{(1,0e - 10) + Z^R} \leq \text{OptCR} \quad [9]$$

Cuando el valor de la fracción es menor o igual la tolerancia el algoritmo BB se detiene, el

valor² $1,0e - 10$ asegura que el denominador no sea cero (EDGAR *et al.*, 2001). En este trabajo analizaremos la tolerancia $0\% \rightarrow [0]$, $1\% \rightarrow [0,01]$, $5\% \rightarrow [0,05]$ y $10\% \rightarrow [0,1]$; a los efectos de no extender la corrida se limitará a un máximo de 10 minutos.

Escenario forestal

Para determinar la programación de la cosecha primeramente se establecieron escenarios para lo cual se simuló distintas condiciones de crecimiento de *Pinus taeda* L. para la Provincia de Misiones, Argentina, debido a que es una de las especies forestales implantadas más importantes de la Argentina junto a otras especies de los géneros *Pinus*, *Eucaliptus*, *Populus* y *Salix*. Se utilizó SisPinus (EMBRAPA-FLORESTAS) como simulador de crecimiento y producción forestal (OLIVEIRA, 2011) para generar los escenarios. Dentro de los regímenes de manejos se consideró entre 2 a 3 raleos selectivos por lo bajo, todo ellos aplicados antes de los 10 años de edad del bosque. En todos los casos se consideró una densidad inicial de 1600 árboles por hectárea con un porcentaje de sobrevivencia del 95%. Se consideraron 1000 rodales con edades iniciales de entre 12 y 17 años llegando al final del horizonte de planificación a edades entre 21 y 26 años. La superficies de los rodales oscilan entre desde 8 a 44 hectáreas con índices de sitio de entre 18 a 23 metros.

Se determinó la edad de cosecha tecnológica y económica óptima de cada rodal. Se definieron hasta 10 períodos como horizontes de planificación. La combinación entre rodal y período se inicia en 15×3 [gap] (rodal \times período [relajación porcentual]) hasta un máximo de 1000×10 . De esta manera se establecen hasta 2994 pares de adyacencia y 10000 variables discretas $\{0,1\}$.

Para resolver los modelos se utilizó el software GAMS 24.0 y solver MIP CPLEX 12.1 el cual corrió en un computador con procesador Intel Core i3-2310M, CPU@ 2,10 GHz, 4 GB de memoria RAM y sistema operativo de 64 bits.

La comparación de los distintos modelos se realizó en base a evaluar el efecto de la relajación con el valor de la función objetivo y los tiempos computacionales de procesamiento en los distintos escenarios planteados.

² La notación $1,0e - 10 = 1 \times 10^{-10}$.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la **figura 2** se pueden ver los resultados de la función objetivo de los escenarios y niveles de relajación.

Se puede ver que en casi todos los casos el modelo URM presenta un valor de la función

objetivo levemente superior a URM-E y URM-T. Esta diferencia se aprecia mejor en la **figura 3**. Sin embargo no parece haber diferencia visible entre la mejor solución posible y el mejor valor objetivo entero (relajado).

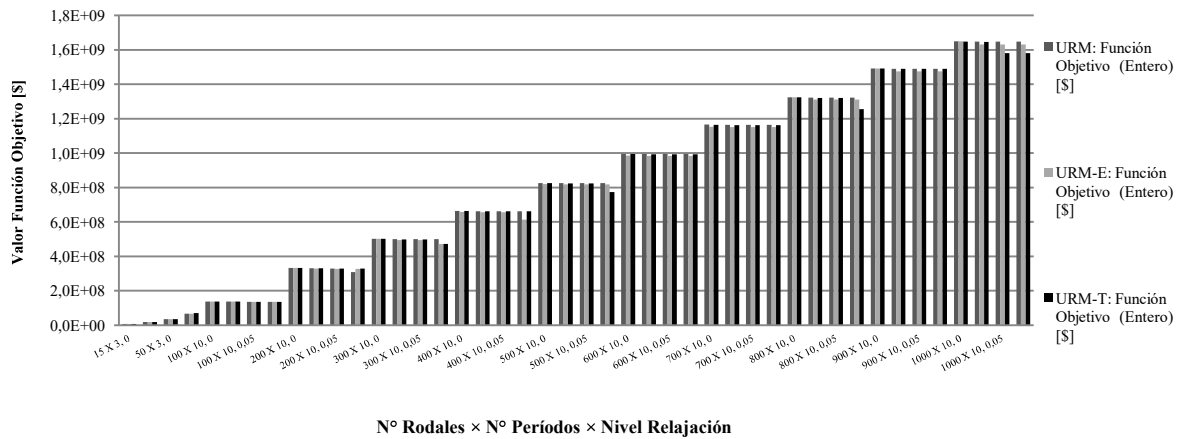


Figura 2. Comparación de la relajación de la Función Objetivo de los distintos escenarios y modelos. Figure 2. Comparison of the objective function value for different scenarios and models with varying relaxation levels.

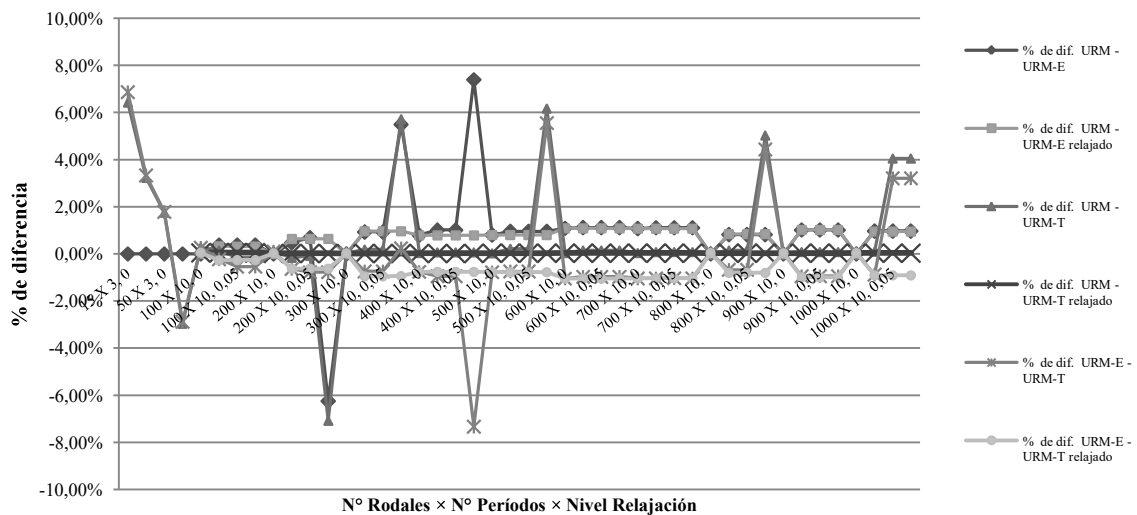


Figura 3. Diferencia porcentual entre valor objetivo de URM, URM-E y URM-T en distintos escenarios. Figure 3. Percentage difference between target value for the URM, URM URM-E and-G models in different scenarios.

La diferencia entre URM y URM-E es en su mayor parte estable con variaciones menores a 2% pero con picos de entre 5% y 7,3% para los escenarios 200×10[0,1], 300×10[0,1] y 400×10[0,1]. Cuando comparamos URM y URM-T las mayores diferencias se encuentran en los escenarios iniciales 15×3[0], 30×3[0], 50×3[0] y 50×6[0] con 6,4%, 3,2%, 1,7% y -2,9% respectivamente. En los escenarios 200×10[0,1], 300×10[0,1] y 500×10[0,1] llega a 7%. Los demás estables en el orden del 1%. Cuando comparamos URM-E y URM-T los escenarios iniciales presentan variación de hasta 6,8%, cuando relajamos en un GAP de [0,1] llega a picos de 5% en algunos de los escenarios.

El efecto de la relajación sobre el valor objetivo es marcado en los escenarios menores a 200 × 10 y GAP de [0] a [0,1], superando los 8% de variación, siendo más marcado cuando pasamos de [0,05] a [0,1]. En la figura 4 se muestra que por

encima de los 500 rodales se estabiliza en menos de 1% de variación exceptuando URM-T el cual relajado al [0,1] supera los 4%.

En la figura 5 se puede ver que la variación relativa decrece sustancialmente cuando el escenario se hace más grande, exceptuándose variaciones bruscas en URM-T, superando los 7%, y algunas de URM-E, sin embargo la tendencia es a una disminución.

En los primeros escenarios no se requiere relajar el modelo, sin embargo, a partir de 50 × 6 URM y URM-E no converge hasta el límite de tiempo de corrida de 600 segundo preestablecido. El modelo URM-T logra converger en 58 segundos, por encima de estos escenarios no se logra convergencia sin relajación. Se puede ver en la figura 6 que el crecimiento de los tiempos de cómputos no guarda una relación directa con el tamaño de los escenarios sin embargo el modelo URM presenta tiempos de cómputos superiores cuando el GAP es mayor a [0].

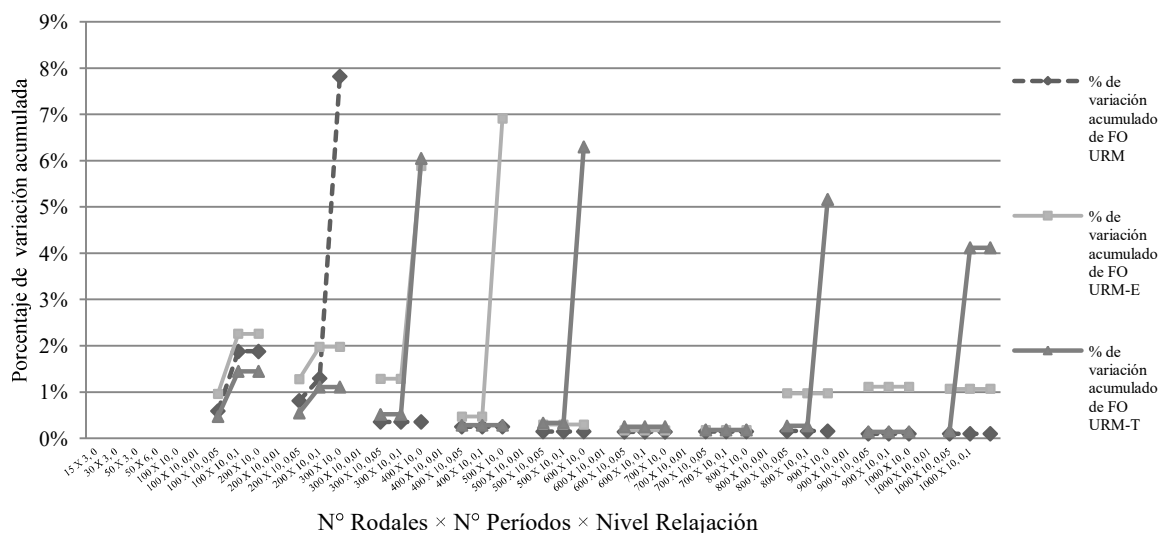


Figura 4. Variación del valor objetivo según niveles de relajación.
 Figure 4. Target value variation by level of relaxation.

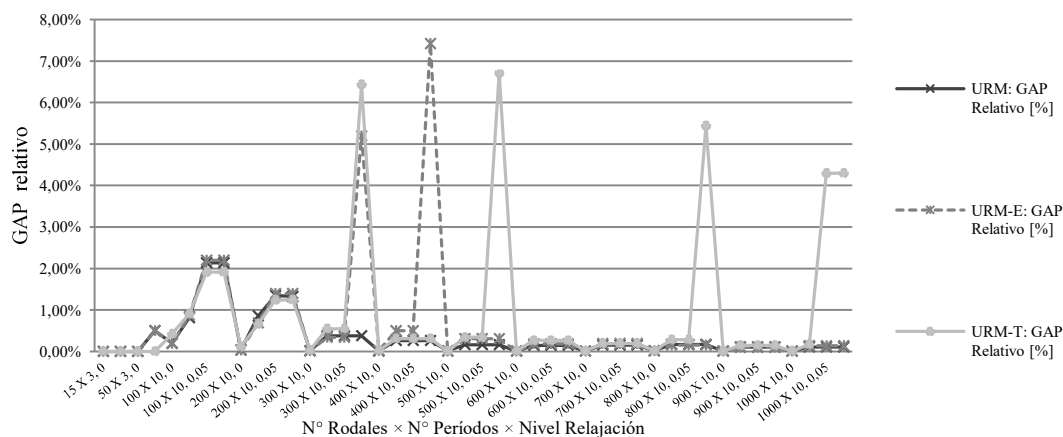


Figura 5. Comparación del GAP absoluto y relativo de los modelos URM, URM-E y URM-T.
 Figure 5. Absolute and relative integer gap at optimal solution for models URM, URM-E and URM-T.

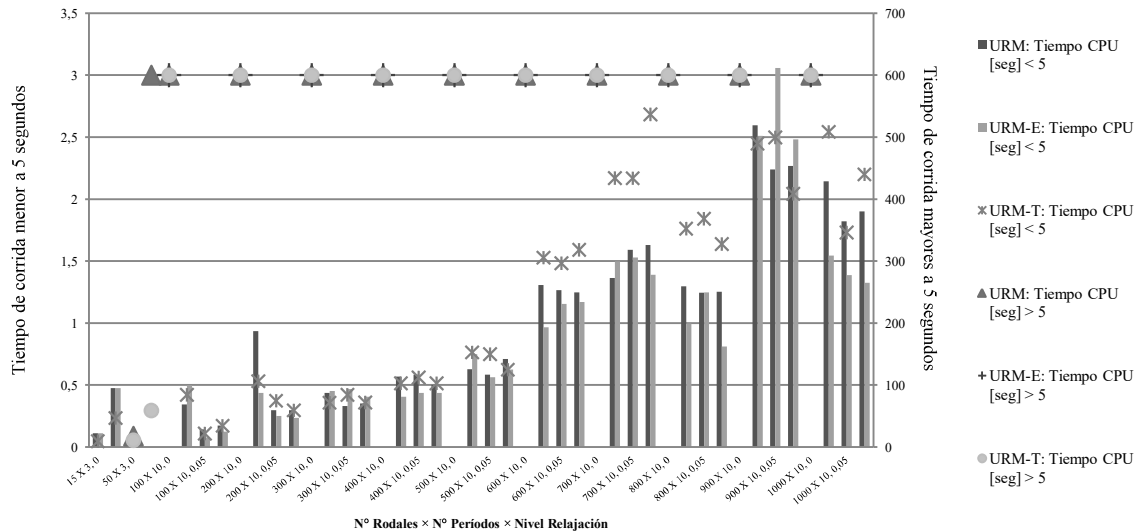


Figura 6. Tiempo de procesamiento para cada escenario. Para tiempos menores a 5 segundos corresponde la ordenada de la izquierda y para tiempos mayores a 5 segundos la de la derecha.

Figure 6. Computing time for each scenario. CPU times smaller than 5 seconds are plotted in the left axis, while greater than 5 seconds in the right axis.

La diferencia dada en los tiempos de resolución de los modelos se debe a que la restricción [6] limita el área de búsqueda permitiendo una mayor velocidad de convergencia hacia el óptimo en URM-E y URM-T. En contraposición el modelo URM presenta un mejor valor objetivo, valorizando el sistema por sobre el rodal.

En la figura 7 se puede ver el comportamiento del valor objetivo para el escenario 100 × 10[0] para URM, URM-E y URM-T.

Se puede ver que hasta los 20 segundos de corrida los modelos presentan los mayores cambios exceptuando URM-T, el cual presenta cambios

importantes hasta los 2000 segundos, sin embargo, en general los incrementales son inferiores a 0,2%.

Los resultados concuerdan con las afirmaciones de FLOUDAS (1995), GOYCOOLEA et al, (2005) los cuales definen a este tipo de modelo como NP-hard o NP-dificiles ya que sin relajamiento el tiempo de resolución se hace exponencial.

Estos resultados no concuerdan con BELTRÁN PÉREZ et al, (2011) el cual menciona que el tiempo de resolución guarda una relación lineal a medida que aumenta el escenario. El mismo autor obtiene resultados de cómputos menores a 0,6 segundos, siendo que por ejemplo el escenario 100 × 10 no llegó a un resultado óptimo en más de 4 horas de corrida.

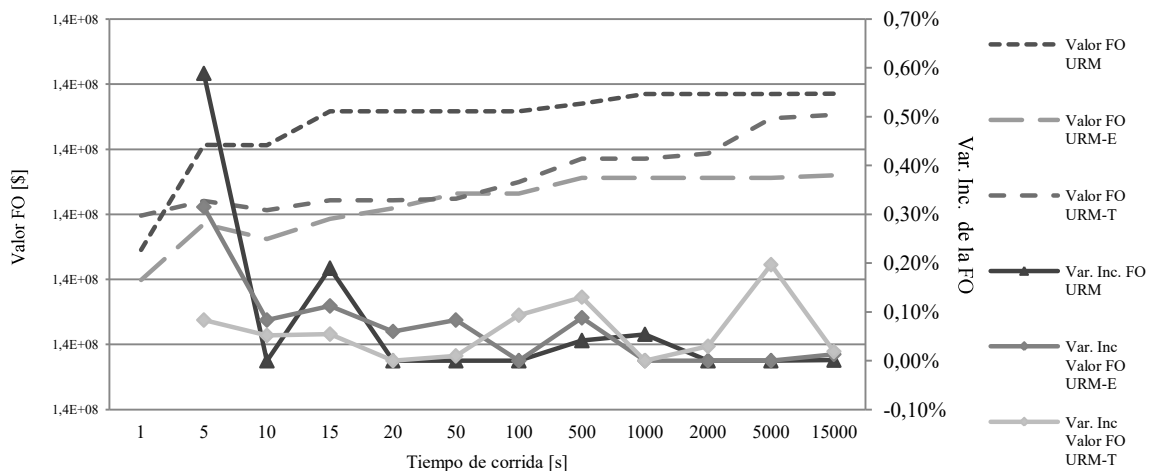


Figura 7. Evolución de valor objetivo para URM y URM-E y URM-T según el tiempo de corrida.

Figure 7. Evolution of target value for URM, URM-E and URM-T models according to the running time.

CONCLUSIONES

El modelo URM presenta en la mayoría de los casos mejores valores objetivos, seguido por URM-T y URM-E, este último, pese a que este busca maximizar el valor del rodal no mejora el valor del sistema.

El efecto de la relajación es menor al 8% y es más patente en los escenarios 100×10 y 200×10 de ambos modelos. El modelo URM-T presenta los mayores saltos entre el GAP [0,05] y [0,1].

En general la variación tiene una fuerte tendencia decreciente a medida que aumentan los tamaños de los escenarios. Extendiendo el tiempo de corrida a más de 4 horas no mejora significativamente el valor de la función objetivo siendo 0,87% en URM, 0,75% en URM-E y 0,66% para URM-T.

Aplicar el modelo URM-T sería la mejor alternativa ya que por un lado aseguramos las dimensiones industriales requeridas y por otro lado obtenemos un beneficio mayor que con URM-E.

BIBLIOGRAFIA

- BELTRÁN PEREZ, C., Mercado, R. Z.; Calderón, O. A. (2011): Un problema de gestión forestal con requerimiento de adyacencia de rodales. Memorias del VII Congreso FIME de Ingeniería Industrial y de Sistemas. San Nicolás de los Garza, NL, México. Pp 1-10.
- BELTRÁN PEREZ, C. (2012): Un problema de gestión forestal con requerimiento de adyacencia en unidades territoriales. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Nuevo León. México. 151 pp.
- BETTINGER, P., Boston, K., Siry, J., Grebner, D. (2009): Forest management and planning. Academic Press. USA. 331 pp.
- BOUNGIORNO, J., Gilles, J. (2003): Decision methods for forest resources management. Academic Press. USA. 439 pp.
- EDGAR, F. E., Himmelblau, D. M., Lasdon, L. S. (2001): Optimizations of chemical processes. McGraw-Hill. USA. 651 pp.
- FLOUDAS, C.A. (1995): Nonlinear and mixed-Integer optimization: fundamentals and applications. Oxford University Press. USA. 462 pp.
- GAMS Development Corporation (2012): The solvers manuals. USA. Versión obtenida el 10/11/2012.
<http://www.gams.com/solvers/solvers.htm#CPLEX>
- GOMIDE, L. R., Arce, J. E., Lindbeck Da Silva, A. (2010): Efeito das restrições espaciais de adjacência no planejamento florestal otimizado. Floresta. 40, pp. 573-584.
- GOYCOOLEA, M. A., Murray, Vielma, J. P., Weintraub, A. (2009): Evaluating approaches for solving the area restriction model in harvest scheduling. Forest Science. 55, pp. 149–165.
- GOYCOOLEA, M., Murray, A.T., Barahona, F., Epstein, A., Weintraub, A. (2005): Harvest scheduling subject to maximum area restrictions: Exploring exact approaches. Operations Research. 53, pp. 490–500.
- HILLIER, F. S., Lieberman, G. J. (1997): Introducción a la investigación de operaciones. McGraw-Hill. USA. 998 pp.
- MCCARL, B. A., Meeraus, A., Van Der Eijk, P., Bussieck, M., Dirkse, M., Steacy, P. (2008): McCarl GAMS User Guide. USA. Versión obtenida el 10/11/2012.
http://www.gams.com/dd/docs/bigdocs/gams2002/mccarlgamsuserguide_web.pdf
- MURRAY, A.T. (1999): Spatial restrictions in harvest scheduling. Forest Science. 45, pp. 45-52.
- MURRAY, A.T., Church, R. L. (1995): Heuristic solution approaches to operational forest planning problems. OR Spektrum. 17, pp.193–203.
- MURRAY, A.T., Weintraub, A. (2002): Scale and unit specification influences in harvest scheduling with maximum area restrictions. Forest Science. 48, pp.779–789.
- MURRAY, A.T. (2007): Spatial environmental concerns. En Handbook of Operations Research in Natural Resources, International Series in Operations Research & Management Science. 99, pp. 419-429.
- OLIVEIRA, E. B. (2011): Softwares para manejo e análise econômica de plantações florestais. Embrapa Florestas, Brasil. Publicação técnica número 216. 68 pp.
- RAMOS, A., Sánchez, P., Ferrer, J. M., Barquín, J., Linares, P. (2010): Modelos matemáticos de optimización. Universidad Pontificia Comillas, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, España. Publicación técnica número 1. 53 pp.